Barycentre d'un réseau fractal, lag-time et temps de concentration

Serge Thibault

Barycentre d'un réseau fractal, lag-time et temps de concentration

Serge Thibault

Résumé

Lorsque le réseau de drainage d'un bassin versant s'apparente à un objet auto similaire caractérisé par une dimension fractale, la distance par rapport à l'exutoire des points de ce réseau qui constituent son ensemble barycentrique est strictement proportionnelle au diamètre de ce réseau qui correspondant à son plus long chemin de drainage. Cette proportion est alors une caractéristique géométrique qui relie le temps de concentration et le lag-time, deux grandeurs temporelles largement utilisées en hydrologie urbaine.

Summary

When the network of a watershed is similar to an object characterized by a self-similar fractal dimension, the distance from the outlet of the points which constitute its barycentric set, is strictly proportional to the diameter of the network which corresponds to the longest path of drainage. This proportion is a geometric property that links time of concentration and lag-time, two times usually used in urban hydrology.

Temps de concentration et lag-time

En hydrologie urbaine, deux temps caractéristiques sont classiquement utilisés par la modélisation de la transformation pluie débit. L'un est le temps de concentration, utilisé dans des formules de débit de pointe comme celle de Caquot en France, l'autre le lag-time, utilisé dans des modèles de transfert pluie débit, comme le modèle à réservoir, modèle permettant d'établir l'hydrogramme de sortie du à une pluie représenté par son hyétogramme. Le temps de concentration (Tc) correspond au temps de contribution d'un bassin versant pour obtenir le débit de point. Le lag-time (K) correspond à la différence temporelle des centres de gravité entre celui de l'hydrogramme de sortie et celui de l'hydrogramme du débit de pluie nette, c'est-à-dire une distribution calculée à partir de la partie du hyétogramme qui sera effectivement écoulée directement par le réseau de drainage.

Ces deux temps dépendent en toute généralité des intensités pluvieuses, des caractéristiques hydrologiques du bassin versant, variables dans le temps. Une partie de leur détermination est liée à la géométrie du bassin versant et à celle de son réseau de drainage.

Si l'on s'en tient qu'au seul aspect géométrique et avec une hypothèse de vitesse moyenne de ruissellement et d'écoulement (Vm), peu variable dans le temps, mais dont la valeur peut dépendre de celles des intensités de la pluie, l'estimation du temps de concentration et celle du lag-time peuvent être établies comme suit :

$Tc = L/Vm$ avec L, la longueur du plus long chemin de drainage.

$K = dg/Vm$ avec dg, la distance du barycentre du bassin versant à l'exutoire.

Alors que la détermination de la longueur du plus long chemin de drainage ne pose guère de difficulté, celle du barycentre, correspondant à la distance moyenne pour aller de l'ensemble des points du bassin versant à son exutoire, est moins simple à établir.

Le barycentre d'un réseau fractal

Nous admettrons que la différence temporelle des centres de gravité entre l'entrée et la sortie correspond à un temps moyen de parcours, établi à partir d'une moyenne des temps de parcours, pondérés par le nombre d'éléments surfaciques (points) qui sont affectés d'un même temps de parcours mis par un « grain » d'eau pour rejoindre l'exutoire. Nous admettrons que le correspondant géométrique de ce temps est un ensemble de points qui constitue l'ensemble barycentrique du bassin versant. Nous supposerons enfin que la distance de cet ensemble à l'exutoire peut être établie à partir de la distance de l'ensemble barycentrique de son réseau de drainage, augmentée de la distance moyenne pour rejoindre les entrées dans ce réseau par ruissellement de surface. En admettant que cette seconde valeur peut être estimée sans trop de difficulté, celle pour le réseau de drainage peut être analytiquement définie dès lors que le réseau à une géométrie fractale.

Pour ce type de réseau caractérisé par sa dimension fractale D, nous avons la relation suivante (Thibault, 1987):

$$L(R) = aR^{D}$$

L(R), longueur totale du réseau contenu dans la boule de rayon R, centrée sur l'exutoire du bassin versant, longueur mesurée en suivant le réseau.
a, coefficient égal à $n*l^{(D-1)}$, n étant un coefficient égal au nombre de sous réseaux se rejoignant à l'exutoire (sous réseaux en parallèle), l, la longueur moyenne des tronçons, un tronçon reliant deux nœuds de jonction.

La position du barycentre du réseau par rapport à son exutoire peut être établie à partir de la définition suivante :

Soit n(R) le nombre de points du réseau situé à la distance R de l'exutoire et Rm le diamètre du réseau (la longueur du plus long chemin de drainage établi sur le réseau). La position barycentrique (Rb) est donnée par la relation suivante :

$$Rb = (\int_0^{Rm} R * n(R) * dR)/L(Rm) \text{ avec L(Rm), longueur totale du réseau (1)}$$

L'accroissement de la longueur du réseau inclus dans une boule de rayon R centrée sur l'exutoire est définie comme suit :

$$L(R + dR) = L(R) + n(R) * dr$$

Le nombre de points situés à la distance R de l'exutoire correspond alors à la dérivée de L(R) :

$$n(R) = \frac{dL(R)}{dR} = a * D * R^{D-1} \text{ (2)}$$

(1) et (2) donnent :

$$Rb = (a * D * \int_0^{Rm} R^D * dR)/(a * Rm^D)$$

$$Rb = \left(\frac{D}{D+1}\right) * Rm \quad (3)$$

Pour un réseau de dimension 1 correspond à une ligne, son barycentre est le milieu de la ligne. Pour un réseau de dimension 2, l'ensemble barycentrique correspond à l'ensemble des points du réseau situés à la distance 2/3 de l'exutoire.

Relation entre lag-time et temps de concentration pour les bassins versants drainés par un réseau fractal

Nous admettrons que ces deux temps caractéristiques de bassins versants peuvent être établis par leurs correspondants sur le réseau ou plus exactement que le bassin versant est une surface réticulaire de dimension D, Rm étant son plus long chemin de drainage. En admettant que la distribution des vitesses de transfert de l'amont vers l'aval peut être assimilée à une vitesse moyenne Vm, le temps de concentration et le lag-time sont donnés par les relations suivantes :

$$Tc = \frac{Rm}{Vm} \; et \; K = \frac{Rb}{Vm} \quad (4)$$

(3) et (4) donne la relation suivante entre Tc et K

$$K = \frac{D}{D+1} * Tc$$

Avec ce rapport, K varie de la moitié au deux tiers du temps de concentration en fonction de D, des valeurs légèrement inférieures à celles plus ou moins couramment utilisées et qui admettent par exemple K=0,8Tc (Hydratec, 2007).

Conclusion

Cette relation simple entre le temps de concentration et le lag-time qui a pu être théoriquement établie pour les bassins versants fractals, c'est-à-dire correspondant à une surface liée à un réseau en règle générale de dimension non entière, comprise entre 1 et 2, peut laisser espérer une homogénéisation possible des formules empiriques, fort nombreuses, fort diversifiées, établies jusqu'alors, comme par exemple,

Pour le temps de concentration Tc
Formule de Giandotti
$Tc = (24 A^{0,5} + 0,09L)/(I*L)^{0,5}$ (Hydratec 2007)
Formule de Caquot
$Tc = 0,5\, I^{-0,41} A^{0,507} Qp^{-0,287}$ (Circulaire INT 77-284)
Etc.

Pour le Lag Time K

Formule Canoé

$K = 0.254\ A^{-0.0076}\ Cimp^{-0.512}\ I^{-0.401}\ L^{0.6}$ *(Canoé, 2005)*

Formule de M. Desbordes

$K = 5.07\ A^{0.18}\ I^{-0.36}\ (1+C)^{-1.9}\ L^{0.15}\ D^{0.21}\ H^{-0.07}$ *(Desbordes 1984)*

Etc.

Tc et K en mn, avec A surface en ha, I pente en m/m, C, coefficient de ruissellement, Cimp, coefficient d'imperméabilisation, L, Longueur du bassin versant en m, D, Durée de la pluie intense en mn, H, hauteur de pluie cumulées sur la durée D, Qp débit de pointe en m^3/s

La relation entre le temps de concentration et le lag-time est un simple rapport qui varie de 0,66 à 0,50. Afin d'homogénéiser ces formules, il conviendra tout d'abord de vérifier que pour les bassins dont la fractalité de la géométrie est jugée pertinente, cette relation théorique représente correctement les rapports entre le lag-time et le temps de concentration, établis à partir du traitement d'observations. Si tel est le cas, le passage de l'un à l'autre pourra être assuré dès lors que la fractalité du bassin versant sera attestée.

Bibliographie

Canoé, 2005, http://www.canoe-hydro.com/doc/AIDEPAP.pdf

Chocat, B., 1997. Encyclopédie de l'hydrologie urbaine et de l'assainissement. Lavoisier, Technique et Documentation, Paris. France

Circulaire INT, 77-284 : Instruction technique relative aux réseaux d'assainissement des agglomérations, *JO* du 22 juin 1977.

Desbordes, M., 1984. Modélisation en hydrologie Urbaine. Recherches et applications.LHM, 183 p.

Desbordes, M., 1974. Réflexions sur les méthodes de calcul des réseaux urbains d'assainissement. Thèse de doctorat, Université des Sciences et Techniques de Languedoc, Montpellier. France.

Hydratec, 2007, http://hydratecsoft.free.fr/logiciels/meteeau/METEEAU_utilisateur.pdf

Thibault, Serge, 1987, « *Modélisation morpho-fonctionnelle des réseaux d'assainissement à l'aide du concept de dimension fractale* », Doctorat d'Etat ès sciences physiques, spécialité génie urbain, INSA de Lyon. France